

# *El sistema Mathematica*

---

Snezhana G. Gocheva-Ilieva

## **Al lector**

**Propósito.** Este texto pretende ayudar en la formación de estudiantes y profesores sobre cómo usar *Mathematica* en niveles intermedios y avanzados. Se recomienda haber seguido previamente la introducción a *Mathematica* que puede verse en el capítulo anterior de esta guía.

**Contenidos.** Se incluyen referencias a las principales funciones de *Mathematica*. Hay un gran número de ejemplos que explican las capacidades del sistema. Los ejemplos se han agrupado de acuerdo con la materia en la forma de ficheros que contienen distintas explicaciones y resultados. Los contenidos de *Mathematica* o *WebMathematica* están “vivos” en el sentido de que podemos repetirlos y usarlos en cualquier momento. El conocimiento significativo se alcanza cuando se repiten los diferentes ejemplos con cambios en los parámetros, en los valores numéricos, en las funciones, etc.

**Objetivos.** Se pretende provocar el uso interactivo del sistema para crear lecciones especiales, tests, tutoriales, artículos y otros desarrollos en diferentes áreas de la educación y de la exploración científica en matemáticas.

Plovdiv, 21.08.2007. El autor

## **CAPÍTULO 1: Teoría general**

---

### **1.1. Introducción**

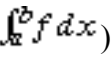
*Mathematica* está entre los más potentes y modernos sistemas de computación para cálculos científicos. Todo lo que podemos calcular a mano y/o con un computador dentro de las diferentes disciplinas matemáticas es fácilmente resuelto con *Mathematica*. Los potentes cálculos simbólicos, las capacidades gráficas y su estilo interactivo hacen que sea un sistema adecuado para el desarrollo de lecciones interactivas y tutoriales educativos. Esta es la razón de que el sistema sea usado por profesores, informáticos, ingenieros e investigadores en una gran multitud de campos. Actualmente, *Mathematica* forma parte de los procesos de formación matemática en un gran número de universidades dentro de los estudios de álgebra, cálculo, ecuaciones diferenciales y otras disciplinas y también empieza a usarse en las escuelas. El número de usuarios está por encima de dos millones. Además de las versiones standards del sistema, existen diferentes paquetes en el mercado dirigidos a diferentes campos de la investigación como la física aplicada, las matemáticas financieras, la estadística aplicada, la biomatemática, etc. *Mathematica* es uno de los más desarrollados sistemas de computación científica al lado de *Matlab*, *Maple*, *Derive*, *Reduce* etc.

### **1.2. Características del sistema *Mathematica***

- Un entorno extremadamente cómodo para la entrada y salida de fórmulas matemáticas usando notaciones matemáticas habituales.
- Cálculos simbólicos y numéricos interactivos.
- Cálculos de gran precisión.
- Admite representaciones gráficas en 2D y 3D, animaciones y música y también implementaciones en tiempo real.
- Un potente lenguaje de programación parecido a C++.
- Más de 1000 funciones incorporadas para realizar cálculos en todas las áreas de las matemáticas.

- Compatibilidad con los lenguajes de programación C++, FORTRAN etc. con posibilidades para intercambiar datos y librerías.
- Sistema abierto que permite la definición de nuevas reglas, funciones, procedimientos y paquetes por parte de los usuarios.
- Versiones modificadas para trabajar en entornos de red y desarrollo de aplicaciones.
- Publicaciones fáciles a través de las características especiales de *Publicon* de Wolfram Research.
- Posibilidades para intercambiar datos en diferentes formatos: HTML, XML (XHTML + MathML) etc.

### 1.3. Reglas básicas en *Mathematica*

- *Mathematica* está construido en dos grandes módulos: Front End (interfaz de usuario) y Kernel (centro de cálculo).
- Los documentos creados con el sistema se llaman Notebooks y son ficheros con la extensión .nb, es decir, prueba.nb, 12my.nb, etc. Los documentos se gestionan a través del menú File.
- Existe la posibilidad de trabajar con varios documentos a la vez usando el menú de Windows. La memoria para las variables y sus valores es común.
- El texto en el documento puede contener líneas de comandos, gráficas, resultados del sistema, etc. y está organizado en celdas (Cells) separadas. Cada celda se procesa en su totalidad. Cada celda se cierra al final de la parte derecha con un corchete].
- La gestión de las celdas se realiza con el menú Cell. Las celdas pueden ser formateadas, agrupadas, desagrupadas, unidas, separadas, cerradas, abiertas, etc. y pueden seleccionarse varias de ellas con la tecla CTRL y haciendo click con el ratón.
- La entrada de fórmulas puede hacerse de varias maneras. Las más habituales son: a) usando las paletas que contienen los diferentes símbolos matemáticos, funciones, etc. y que se encuentran en el menú File/Palettes (como ejemplo puede considerarse la siguiente integral ) o b) escribiendo el correspondiente operador (por ejemplo, para el caso anterior, **Integrate[ f, { x, a, b } ]** ).
- *Mathematica* es un intérprete. El usuario introduce los datos a procesar en la celda Input y el sistema devuelve las salidas en líneas separadas mediante sucesivas celdas Output. Los bucles son una excepción al procedimiento general.
- En las sesiones de trabajo todas las entradas y salidas son guardadas por el sistema y pueden ser usadas con su correspondiente número, generado de acuerdo con el orden de ejecución.
- Las celdas Input se ejecutan presionando SHIFT+ENTER.
- Los cálculos pueden realizarse con un número arbitrario de dígitos. Para esto se utiliza el comando **N[comando, número de dígitos]**. Por defecto, se calcula con 6 decimales.
- Cuando hay cálculos grandes, el sistema los muestra con un doble corchete]] a la derecha del campo de trabajo.
- Los cálculos se pueden interrumpir a través del menú Action/Interrupt.
- Cualquier línea, celda o grupo de celdas del notebook puede ser ejecutada repetidamente en cualquier orden.

- Hay que tener en cuenta a la hora de teclear las funciones y comandos que el sistema es sensible a los nombres de las variables y que, por ejemplo, CoCa-CoLa es diferente de Coca-Cola.
- Las funciones del sistema comienzan siempre por letra mayúscula y los argumentos van entre corchetes.
- Es recomendable que los nombres de las funciones definidas por el usuario no empiecen por letras mayúsculas. Los nombres válidos empiezan necesariamente por una letra.
- La línea de comandos y operadores pueden contener funciones del sistema, funciones de los usuarios, variables, constantes, etc.
- Para familiarizarse rápidamente con *Mathematica* es muy recomendable usar la extraordinaria ayuda que contiene el sistema y el manual realizado por el creador de *Mathematica*, S. Wolfram.

#### 1.4. Símbolos especiales y operaciones en *Mathematica*

| <b><i>Símbolo</i></b> | <b><i>Función</i></b>                                                                                    | <b><i>Ejemplo</i></b>                                                                       |
|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>%</b>              | El resultado del último Out                                                                              | <b>N[% ,50]</b> – Repite el ultimo cálculo con una precisión de 50 dígitos                  |
| <b>%%</b>             | El resultado del penúltimo Out                                                                           |                                                                                             |
| <b>%%%</b>            | El resultado del antepenúltimo Out                                                                       |                                                                                             |
| <b>%n</b>             | El resultado del Out[n]                                                                                  | <b>%20</b> – Repite el Out 20                                                               |
| <b>,</b>              | Separador universal                                                                                      | <b>Plot[x<sup>3</sup>+4, {x,1,5}]</b>                                                       |
| <b>;</b>              | Separador para expresiones dentro de una línea. Al final de la línea inhibe la salida.                   | <b>x=223;</b> -No se visualiza Out                                                          |
| <b>.</b>              | Punto decimal.<br>Símbolo para borrar el contenido de una variable.<br>Símbolo para multiplicar matrices | <b>-22.345</b><br><b>x1=.</b> El contenido de la variable x1 ha sido borrado.<br><b>m.n</b> |
| <b>=</b>              | Símbolo de asignación                                                                                    | <b>a12=1.345π</b>                                                                           |
| <b>:=</b>             | Definiendo una función o una regla                                                                       | <b>f[x_]:=Sin[x]</b>                                                                        |
| <b>/. </b>            | Cambio temporal de valores para el cálculo actual                                                        | <b>Cos[x<sup>2</sup>] /. x-&gt;3a</b><br>-El resultado es cos(9a <sup>4</sup> )             |
| <b>-&gt;</b>          | Flecha para la sustitución de un valor o una regla                                                       | <b>ArcCos[x<sup>2</sup>] /. x-&gt;0.5</b>                                                   |
| <b>//N</b>            | Valor numérico de la expresión anterior                                                                  | <b>π //N</b> - El resultado es 3.14159                                                      |
| <b>( )</b>            | Paréntesis para operaciones aritméticas o lógicas                                                        | <b>h=( 7-x<sup>5</sup>/ (1-3 ( 2+x<sup>3</sup>))</b>                                        |
| <b>[ ]</b>            | Corchetes para los argumentos de las funciones.                                                          | <b>D[Sin[x-4]]</b>                                                                          |
| <b>{ }</b>            | Llaves para las listas de elementos.                                                                     | <b>m={-1, 0, 6, 4 ,1 }</b><br>- m es un vector con 6 coordenadas                            |
| <b>[ [ ] ]</b>        | Corchetes para la extracción de elementos de una lista o índices.                                        | <b>m[ [ 3 ] ]</b> - Tercer elemento de m                                                    |
| <b>(* *)</b>          | Paréntesis para comentarios                                                                              | <b>(*puede ponerse cualquier cosa*)</b>                                                     |

|                                                                |                                                                                                |                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\wedge$<br><b>* or space</b><br>$/$<br>$+$ $-$                | Símbolos para las operaciones aritméticas:<br>Potencia, multiplicación, división, suma y resta | $a=2\pi / 7$<br>$b=a*c / (3-x^3)$                                                                          |
| $=$<br>$\neq$<br>$>$ $>=$<br>$<=$ $<$                          | Símbolos de comparación:<br>Igual, distinto, mayor, mayor o igual, etc.                        | Se usan para verificar identidades, resolver ecuaciones, etc.                                              |
| $!$<br><b>&amp;&amp;</b><br>$\parallel$<br><b>Xor[p,q,...]</b> | Operaciones lógicas:<br>Not lógico o factorial<br>And lógico<br>Or lógico<br>‘Or’ Exclusivo    | Usadas para resolver cálculos complicados, verificaciones lógicas, etc.,<br><b>! (a &amp;&amp; b&lt;2)</b> |
| $<<$                                                           | Símbolo para cargar un paquete externo                                                         | <code>&lt;&lt;Graphics`Shapes`</code><br><code>&lt;&lt;name_of_the_file</code>                             |
| $>>$                                                           | Símbolo para exportar datos a un fichero                                                       | <b>Expresión &gt;&gt; name_of_the_file</b>                                                                 |
| $>>>$                                                          | Añadir al fichero                                                                              | <b>Expresión &gt;&gt;&gt; name_of_the_file</b>                                                             |
| $!!$                                                           | Lee el texto en el fichero                                                                     | <b>Expresión &gt;&gt; f1</b><br><b>!!f1</b>                                                                |

## 1.5. Constantes matemáticas y funciones

| <i>Nombre</i>                | <i>Función</i>           | <i>Ejemplos</i>                                     |                      |
|------------------------------|--------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------|
|                              |                          | In (entrada)                                        | Out (resultado)      |
| <b>!</b>                     | Factorial                | <b>5!</b>                                           | 120                  |
| <b>Pi o <math>\pi</math></b> | El número $\pi$          | $\pi$<br><b>N[% ,8]</b>                             | $\pi$<br>3.1415927   |
| <b>E o e</b>                 | El número $e$            | $e//N$                                              | 2.71828              |
| <b>True</b>                  | Verdadero                | <b>True &amp;&amp; False</b>                        | <b>False</b>         |
| <b>False</b>                 | Falso                    | <b>!False</b>                                       | <b>True</b>          |
| <b>I o i</b>                 | Unidad imaginaria        | <b>p=(5+3I)<sup>3</sup></b>                         | -10 + 198 I          |
| <b>Re[z]</b>                 | La parte real de z       | <b>Re[p]</b>                                        | -10                  |
| <b>Im[z]</b>                 | La parte imaginaria de z | <b>Im[p]</b>                                        | 198                  |
| <b>Degree</b>                | Medida de ángulos        | <b>30Degree//N</b>                                  | 0.523599             |
| <b>Abs[x]</b>                | Valor absoluto           | <b>Abs[-45]</b>                                     | 45                   |
| <b>Sqrt[ x ]</b>             | Raíz cuadrada de x       | <b>Sqrt[1024.]</b>                                  | 32                   |
| <b>Exp[ x ]</b>              | Función exponencial      | $\frac{2.5-3.125}{2}$<br><b>Exp[ ]</b>              | 0.731616             |
| <b>Log[x]</b>                | Logaritmo neperiano      | <b>Log[1.]</b>                                      | 0                    |
| <b>Log[b,x]</b>              | Logaritmo en base b de x | <b>Log[3, 9]</b>                                    | 2                    |
| <b>Sin[ x ]</b>              | La función seno          | $\sin\left[\frac{\pi}{4}\right]$<br><b>Sin[ 4 ]</b> | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| <b>Cos[x]</b>                | La función coseno        | $\cos\left[\frac{\pi}{6}\right]$<br><b>Cos[ 6 ]</b> | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

|                  |                                              |                                                |                     |
|------------------|----------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------|
| <b>Tan[x]</b>    | La función tangente                          | <b>Tan[<math>\frac{\pi}{4}</math>]</b>         | 1                   |
| <b>Cot[x]</b>    | La función cotangente                        | <b>Cot[30Degree]</b>                           | $\sqrt{3}$          |
| <b>ArcSin[x]</b> | La función arco seno                         | <b>ArcSin[Cos[<math>\frac{\pi}{6}</math>]]</b> | $\frac{\pi}{3}$     |
| <b>ArcCos[x]</b> | La función arco coseno                       | <b>ArcCos[Tan[2.]]</b>                         | 3.14159 - 1.41775 i |
| <b>ArcTan[x]</b> | La función arco tangente                     | <b>ArcTan[1]</b>                               | $\frac{\pi}{4}$     |
| <b>ArcCot[x]</b> | La función arco cotangente                   | <b>ArcCot[1]</b>                               | $\frac{\pi}{4}$     |
| <b>Round[x]</b>  | El entero más cercano a x                    | <b>Round[2.6]</b><br><b>Round[-2.6]</b>        | 3<br>-3             |
| <b>Mod[n,m]</b>  | El resto de la división n/m                  | <b>Mod[27, 4]</b>                              | 3                   |
| <b>Random[ ]</b> | Número pseudoaleatorio en el intervalo [0,1) | <b>Random[ ]</b><br><b>Random[ ]</b>           | 0.08779<br>0.648845 |

## 1.6. Elementos de álgebra: Transformaciones de expresiones algebraicas y lógicas

| <i>Función</i>                                                              | <i>Acción</i>                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| <b>Variable = .</b>                                                         | La variable pierde su valor                                              |
| <b>Clear[ variable1, variable2, ... ]</b>                                   | Las variables pierden sus valores                                        |
| <b>expression1 /. variable -&gt; expression2</b>                            | Reemplaza la variable en expr1 con expr2                                 |
| <b>expression1 /. {var.1-&gt; expression2, var.2 -&gt; expression2,...}</b> | Reemplazo de las variables 1, 2, .. en expr1 por sus valores respectivos |
| <b>Expression // Short</b>                                                  | Muestra el primer miembro de la expresión                                |
| <b>Short [ expression , n ]</b>                                             | Muestra los primeros n miembros de la expresión                          |
| <b>Length [ expression ]</b>                                                | Cuenta el número de elementos                                            |
| <b>If[ if expr1, then expr2, else expr3]</b>                                | Verificación lógica                                                      |
| <b>Expand[ expression ]</b>                                                 | Quita paréntesis y expande la expresión                                  |
| <b>Simplify[ expression ]</b>                                               | Reduce los elementos de una expresión si es posible                      |
| <b>Expand[ expression , Trig -&gt; True]</b>                                | Expande la expresión teniendo en cuenta las identidades trigonométricas. |
| <b>Complex Expand[ expression ]</b>                                         | Expande las expresiones complejas                                        |
| <b>LogicalExpand [ expression ]</b>                                         | Expande las expresiones lógicas                                          |
| <b>Factor[ expression ]</b>                                                 | Factoriza expresiones                                                    |
| <b>Factor[ expression , Trig -&gt; True ]</b>                               | Factoriza expresiones teniendo en cuenta las identidades trigonométricas |
| <b>ExpandAll[ expression ]</b>                                              | Expande todas las expresiones                                            |
| <b>Together [ expression ]</b>                                              | Reduce a común denominador                                               |
| <b>Apart[ expression ]</b>                                                  | Descomposición en fracciones simples                                     |
| <b>Cancel[ expression ]</b>                                                 | Simplifica una fracción                                                  |
| <b>Collect [ expression , x ]</b>                                           | Agrupar según las potencias de x                                         |

|                                                         |                                                                    |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| <b>FactorTerms</b> [ expression , x ]                   | Factores independientes de x                                       |
| <b>Numerator</b> [ expression ]                         | El numerador de una expresión                                      |
| <b>Denominator</b> [ expression ]                       | El denominador de una expresión                                    |
| <b>ExpandNumerator</b> [ expression ]                   | Expande solo el numerador                                          |
| <b>ExpandDenominator</b> [ expression ]                 | Expande solo el denominador                                        |
| <b>InterpolatingPolynomial</b> [{x1,f1},{x2,f2}, ...,x] | Halla el polinomio de interpolación asociada a la tabla de valores |

## 1.7. Elementos de cálculo: derivadas, integrales, límites, sumas, ecuaciones

| <i>Función</i>                                                      | <i>Acción</i>                                                                                |
|---------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>D</b> [f, x] o $\partial_x f$                                    | Calcula la derivada parcial de f respecto de x                                               |
| <b>D</b> [f, x, y ... ] o $\partial_{x,y} f$                        | Calcula la derivada parcial de f respecto de x, y, etc.                                      |
| <b>D</b> [f,{x, n }]                                                | Calcula la derivada n-ésima de f respecto de x                                               |
| <b>Dt</b> [ f ]                                                     | Calcula la derivada total de f                                                               |
| <b>Dt</b> [ f, x ]                                                  | Calcula la derivada total de f en la derivada total de x                                     |
| <b>D</b> [ f [x] ,x]                                                | Calcula la derivada parcial de f[x] respecto de x                                            |
| <b>Integrate</b> [f, x] o $\int f dx$                               | Calcula la integral indefinida                                                               |
| <b>Integrate</b> [f,{x, a, b}] o $\int_a^b f dx$                    | Calcula la integral definida                                                                 |
| <b>Integrate</b> [f,{x, a, b}] //N                                  | Calcula el valor numérico de la integral definida                                            |
| <b>N</b> [Integrate[f,{x, a, b}] , n]                               | Calcula el valor numérico de la integral definida con una precisión de n dígitos             |
| <b>Integrate</b> [f,{x, a, b},{y, c, d }]                           | Calcula la integral doble                                                                    |
| <b>Limit</b> [f, x->x0]                                             | Calcula el límite                                                                            |
| <b>Limit</b> [f, x->Infinity] or <b>Limit</b> [f, x-> $\infty$ ]    | Calcula el límite infinito                                                                   |
| <b>Sum</b> [ f, {i, imin, imax } ] or $\sum_{i=imin}^{imax} f$      | Calcula la suma de f según el recorrido de la variable                                       |
| <b>Sum</b> [ f, {i, imin, imax , di}]                               | Como la función previa, pero incrementando el índice i con un salto di                       |
| <b>Sum</b> [f,{i, imin, imax},{j,jmin,jmax }]                       | Sumas múltiples                                                                              |
| <b>Product</b> [ f, {i, imin, imax } ] or $\prod_{i=imin}^{imax} f$ | Calcula el producto $\prod_{i=imin}^{imax} f$                                                |
| <b>Product</b> [ f, {i, imin, imax , di}]                           | Como la función previa, pero incrementando el índice i con un salto di                       |
| <b>Product</b> [f,{i,imin, imax},{j,jmin,jmax}]                     | Calcula productos múltiples                                                                  |
| <b>Series</b> [f, {x, x0, n}]                                       | Fórmula de Taylor de f en $x_0$ de orden n.                                                  |
| <b>Normal</b> [Series[f, {x, x0, n}]                                | El polinomio de Taylor de f                                                                  |
| <b>Solve</b> [f==0, x]                                              | Resuelve algebraicamente la ecuación f=0 respecto de x. El resultado es una lista de raíces. |
| <b>Solve</b> [left_hand_side==right_hand_side, x]                   | Como antes pero con una ecuación en general                                                  |

|                                                                    |                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>x1=x /. %[[1]]</b>                                              | Extrae la primera raíz de la ecuación en la variable x1                                        |
| <b>x2=x /. %%[[2]]</b>                                             | Extrae la segunda raíz de la ecuación en la variable x2                                        |
| <b>N[Solve [f==0, x] , n]</b>                                      | Calcula numéricamente las raíces de la ecuación con precisión de n dígitos                     |
| <b>Solve [ {f==0, g==0}, {x, y}]</b>                               | Resuelve el sistema de ecuaciones. El resultado es una lista con los valores de las variables. |
| <b>Eliminate [{left1==right1, left2==right2, ...},{x, y, ...}]</b> | Si es posible elimina las variables del sistema de ecuaciones y da la posible solución.        |
| <b>Reduce[{left1==right1, left2==right2, ...},{x, y, ...}]</b>     | Análogo al anterior pero con las relaciones lógicas                                            |

## 1.8. Listas

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  es una lista de elementos. Los elementos pueden ser de muy diversos tipos: números, expresiones, listas, gráficas, ...

| <b><i>Función</i></b>                        | <b><i>Acción</i></b>                                                                 |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>{a1,a2,.....}</b>                         | Genera una lista                                                                     |
| <b>{{b1,b2,...},{c1,c2,...}, ...}</b>        | Genera una matriz. La primera fila es b1,b2,... , la segunda fila es c1,c2,..., etc. |
| <b>Table[ f , {n}]</b>                       | Genera la lista {f,f,...,f}                                                          |
| <b>Table[ f , {i, n}]</b>                    | Genera una lista, $i=1, \dots, n$ .                                                  |
| <b>Table[ f , {i, imin, imax}]</b>           | Genera una lista, $i=imin, \dots, imax$                                              |
| <b>Table[ f , {i, imin, imax, di}]</b>       | Como la función previa, pero incrementando el índice i con un salto di               |
| <b>TableForm[ list ]</b>                     | Muestra los elementos de list en forma de tabla                                      |
| <b>ColumnForm[ list ]</b>                    | Muestra los elementos de list en forma de columnas                                   |
| <b>% // TableForm</b>                        | Muestra el resultado anterior en forma de tabla                                      |
| <b>Array[ a, n ]</b>                         | Define la lista {a[1],a[2],..., a[n]}                                                |
| <b>Range[ n ]</b>                            | Genera la lista de enteros {1,2,...,n}                                               |
| <b>Range[ n1,n2]</b>                         | Genera la lista de enteros de n1 a n2                                                |
| <b>Range[ n1,n2, di ]</b>                    | Como la función previa, pero incrementando el índice i con un salto di               |
| <b>list[ [ i ] ] o Part[list, i ]</b>        | Extrae el i-ésimo element de list                                                    |
| <b>list[ [ i, j ] ] o Part[list, i , j ]</b> | Extrae el elemento (i,j) de una matriz list                                          |
| <b>Lenght[ list ]</b>                        | Cuenta el número de elementos de list                                                |
| <b>Table[ f, {i, imax}, {j, jmax} ]</b>      | Genera una matriz , $i=1,2,\dots, imax$ and $j=1,2,\dots, jmax$                      |
| <b>Array[ a, {m,n}]</b>                      | Define una lista bidimensional de objetos a[i,j]                                     |
| <b>IdentityMatrix[ n ]</b>                   | Genera la matriz identidad de orden n                                                |
| <b>DiagonalMatrix[ list ]</b>                | Genera una matriz diagonal con los elementos de list                                 |
| <b>Dimensions[ list ]</b>                    | Proporciona la dimensión de list                                                     |
| <b>MatrixForm[ list ]</b>                    | Presenta la lista en la forma matricial habitual.                                    |

|                                              |                                                    |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| <b>c m o c*m</b>                             | Multiplica la constante c por la matriz m          |
| <b>a.b</b>                                   | Multiplica las matrices a y b                      |
| <b>Inverse[m]</b>                            | Si existe, calcula la inversa de la matriz m       |
| <b>MatrixPower[m, n]</b>                     | Calcula la matriz $m^n$                            |
| <b>Det[m]</b>                                | Calcula el determinante de la matriz cuadrada m    |
| <b>Transpose[ m ]</b>                        | Calcula la matriz traspuesta de m                  |
| <b>Eigenvalues[ m ]</b>                      | Calcula los valores propios de m                   |
| <b>Eigenvalues[m , k]</b>                    | Calcula los primeros k valores propios de m        |
| <b>Eigenvalues[ N [m] ]</b>                  | Calcula numéricamente los valores propios de m     |
| <b>Eigenvectors[ m ]</b>                     | Calcula los vectores propios de m                  |
| <b>Eigenvectors[ N[ m ] ]</b>                | Calcula numéricamente los vectores propios de m    |
| <b>Apply [ Plus,list] o Plus @@ list</b>     | Suma todos los elementos de list                   |
| <b>Apply [ Times, list ] o Times @@ list</b> | Calcula el producto de todos los elementos de list |

## 1.9. Gráficas 2D y generación de sonidos.

| <i>Función</i>                                                                 | <i>Acción</i>                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Plot[ f, {x, a, b} ]</b>                                                    | Proporciona la gráfica de la función f[x] con x en el intervalo [a,b]                                              |
| <b>Plot[ f, {x, a, b}, PlotRange -&gt;{c, d} ]</b>                             | Proporciona la gráfica de la función f[x] con x en el intervalo [a,b] y los valores de f[x] en el intervalo [c,d]  |
| <b>Plot[ {f1, f2, f3,...}, {x, a, b} ]</b>                                     | Proporciona las gráficas de las funciones f1,f2,f3 con x en el intervalo [a,b]                                     |
| <b>Show[g1,g2,g3]</b>                                                          | Proporciona las gráficas almacenadas en las variables g1, g2, ...                                                  |
| <b>ListPlot[ {y1, y2, y3, ...} ]</b>                                           | Dibuja los puntos {1,y1},{2,y2},...                                                                                |
| <b>ListPlot[ { {x1,y1}, {x2,y2}, ...} ]</b>                                    | Dibuja los puntos {x1,y1}, {x2,y2},...                                                                             |
| <b>ListPlot[{ {x1,y1}, {x2,y2}, , PlotJoined -&gt;True ]</b>                   | Conecta los puntos mediante la línea quebrada.                                                                     |
| <b>ParametricPlot[ {fx,fy} , {t, tmin,tmax} ]</b>                              | Dibuja la curva dada por sus ecuaciones paramétricas                                                               |
| <b>ParametricPlot[ {fx,fy} , {gx,gy},..., {t, tmin,tmax} ]</b>                 | Dibuja varias curvas dadas por sus ecuaciones paramétricas en los mismos ejes coordenados                          |
| <b>ParametricPlot[ {fx,fy} , {t, tmin,tmax}, AspectRatio -&gt; Automatic ]</b> | Como antes pero con la opción de la relación entre las escalas de los ejes                                         |
| <b>Play[ f, {t, tmin, tmax} ]</b>                                              | Proporciona el sonido cuya amplitud viene dada por f como función del tiempo t en segundos en el intervalo marcado |
| <b>ListPlay[{a1,a2,a3,...}, SampleRate -&gt; r ]</b>                           | Proporciona el sonido almacenado en las variables a1, a2, a3, ..                                                   |
| <b>Show[ ssound1 ]</b>                                                         | Proporciona el sonido almacenado en la variable.                                                                   |

## 1.10. Gráficas 3D

| <i>Función</i>                                                                                                                                                                  | <i>Acción</i>                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Plot3D</b> [ <i>f</i> , { <i>x</i> , <i>a</i> , <i>b</i> }, { <i>y</i> , <i>c</i> , <i>d</i> } ]                                                                             | Proporciona la gráfica de la función $f[x,y]$ , con la <i>x</i> variando en el intervalo [ <i>a</i> , <i>b</i> ] y la <i>y</i> en el intervalo [ <i>c</i> , <i>d</i> ] |
| <b>ListPlot3D</b> [{{ <i>x</i> <sub>1</sub> , <i>y</i> <sub>1</sub> , <i>z</i> <sub>1</sub> }, { <i>x</i> <sub>2</sub> , <i>y</i> <sub>2</sub> , <i>z</i> <sub>2</sub> },...} ] | Dibuja los puntos tridimensionales citados.                                                                                                                            |
| <b>ListContourPlot</b> [ <i>data array</i> ]                                                                                                                                    | Dibuja las curvas de nivel de la lista de datos                                                                                                                        |
| <b>ListDensityPlot</b> [ <i>data array</i> ]                                                                                                                                    | Dibuja la gráfica de densidades de la lista de datos                                                                                                                   |
| <b>ParametricPlot3D</b> [{ <i>fx</i> , <i>fy</i> , <i>fz</i> }, { <i>t</i> , <i>tmin</i> , <i>tmax</i> } ]                                                                      | Dibuja una curva dada por sus ecuaciones paramétricas                                                                                                                  |
| <b>ParametricPlot3D</b> [{ <i>fx</i> , <i>fy</i> , <i>fz</i> }, { <i>t</i> , <i>tmin</i> , <i>tmax</i> },{ <i>u</i> , <i>umin</i> , <i>umax</i> } ]                             | Dibuja una superficie dada por sus ecuaciones paramétricas                                                                                                             |
| <b>ParametricPlot3D</b> [ { <i>fx</i> , <i>fy</i> , <i>fz</i> , <i>s</i> }, { <i>t</i> , <i>tmin</i> , <i>tmax</i> }, { <i>u</i> , <i>umin</i> , <i>umax</i> }]                 | Oscurece la gráfica de la superficie de acuerdo con la función <i>s</i>                                                                                                |

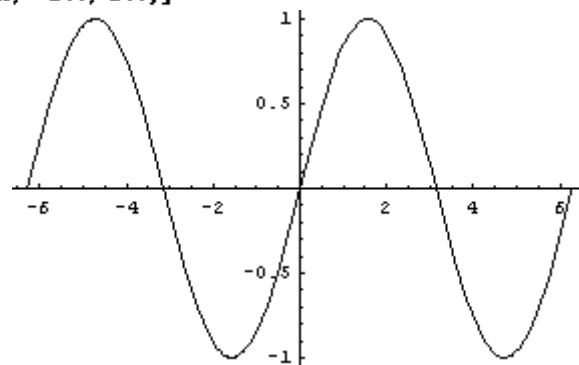
## 1.11. Paquetes para gráficas 2D y 3D

En los paquetes de *Mathematica* aparecen colecciones de funciones adicionales para álgebra, cálculo, gráficas, matemática discreta, métodos numéricos, teoría de números y estadística. Mostramos aquí algunos paquetes correspondientes a las representaciones gráficas.

| <i>Paquetes y algunas de sus funciones</i>                                                                                                                              | <i>Descripción</i>                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>&lt;&lt;Graphics`Graphics`</b>                                                                                                                                       | Carga el paquete que permite el uso de gráficas especiales                                                                               |
| <b>BarChart</b> [ <i>list</i> ]                                                                                                                                         | Presenta los datos en forma de histograma                                                                                                |
| <b>PieChart</b> [ <i>list</i> ]                                                                                                                                         | Presenta los datos en forma de “tarta”                                                                                                   |
| <b>PolarPlot</b> [ <i>ft</i> , { <i>t</i> , <i>tmin</i> , <i>tmax</i> } ]                                                                                               | Proporciona la gráfica de una curva en polares                                                                                           |
| <b>&lt;&lt;Graphics`Animation`</b>                                                                                                                                      | Cargar el paquete que permite animaciones gráficas                                                                                       |
| <b>Animate</b> [ <i>gr</i> , { <i>t</i> , <i>tmin</i> , <i>tmax</i> } ]                                                                                                 | Anima la gráfica <i>gr</i> según el recorrido de <i>t</i> .                                                                              |
| <b>ShowAnimation</b> [{ <i>gr</i> <sub>1</sub> , <i>gr</i> <sub>2</sub> ,...}]                                                                                          | Anima simultáneamente la secuencia de objetos gráficos almacenados en las variables <i>gr</i> <sub>1</sub> , <i>gr</i> <sub>2</sub> ,... |
| <b>&lt;&lt;Graphics`InequalityGraphics`</b>                                                                                                                             | Carga el paquete que permite representar las soluciones de desigualdades y sistemas de desigualdades.                                    |
| <b>InequalityPlot</b> [ <i>ineqs</i> , { <i>x</i> , <i>xmin</i> , <i>xmax</i> }, { <i>y</i> , <i>ymin</i> , <i>ymax</i> } ]                                             | Dibuja la solución gráfica del conjunto de desigualdades <i>ineqs</i> en 2D                                                              |
| <b>InequalityPlot3D</b> [ <i>ineqs</i> , { <i>x</i> , <i>xmin</i> , <i>xmax</i> }, { <i>y</i> , <i>ymin</i> , <i>ymax</i> }, { <i>z</i> , <i>zmin</i> , <i>zmax</i> } ] | Dibuja la solución gráfica del conjunto de desigualdades <i>ineqs</i> en 3D                                                              |

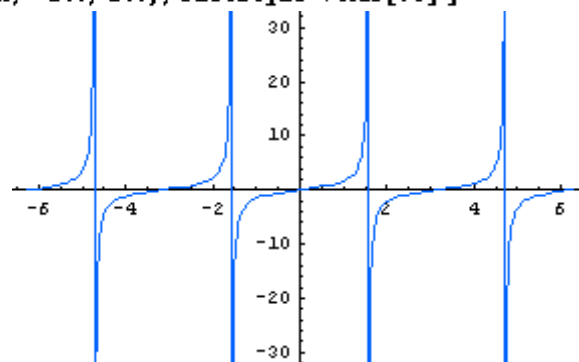
## 1.12. Ejemplos de gráficas 2D y 3D

```
g1 = Plot[Sin[x], {x, -2  $\pi$ , 2  $\pi$ }]
```



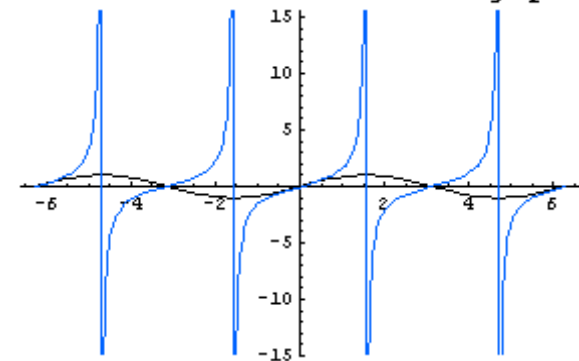
- Graphics -

```
g2 = Plot[Tan[x], {x, -2  $\pi$ , 2  $\pi$ }, PlotStyle -> Hue[.6]]
```



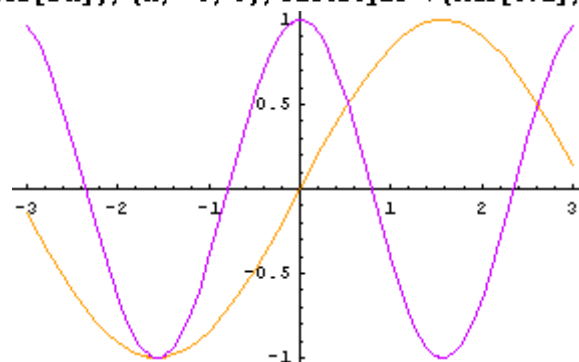
- Graphics -

```
Show[g1, g2] (* simultaneous visualization of the two graphical objects g1, g2 *)
```



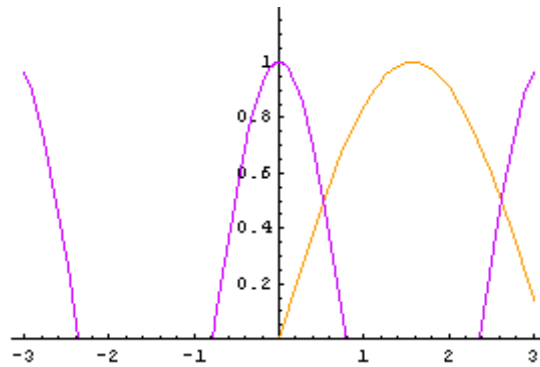
- Graphics -

```
g3 = Plot[{Sin[x], Cos[2 x]}, {x, -3, 3}, PlotStyle -> {Hue[0.1], Hue[0.8]}]
```



- Graphics -

```
g4 = Plot[{Sin[x], Cos[2 x]}, {x, -3, 3}, PlotRange -> {0, 1.2}, PlotStyle -> {Hue[0.1], Hue[0.8]}]  
(* The Option PlotRange gives desired interval for the function values *)
```

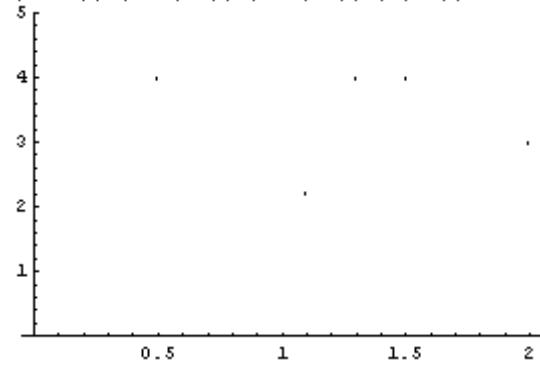


- Graphics -

```
tt = {{0, 3}, {0.5, 4}, {1.1, 2.2}, {1.3, 4}, {1.5, 4}, {2, 3}}
```

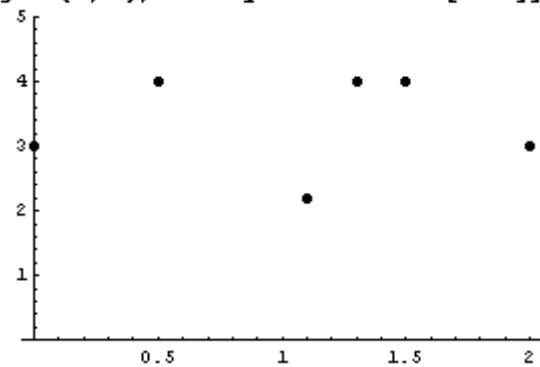
```
ListPlot[tt, PlotRange -> {0, 5}]
```

```
{{0, 3}, {0.5, 4}, {1.1, 2.2}, {1.3, 4}, {1.5, 4}, {2, 3}}
```



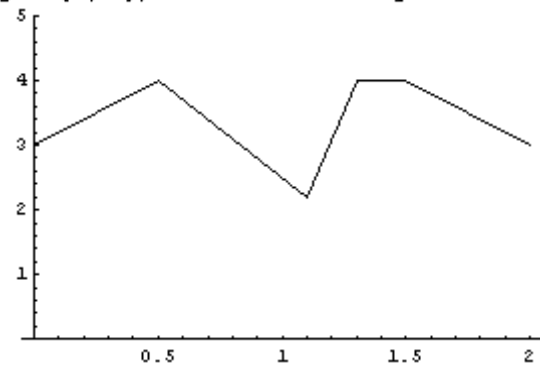
- Graphics -

```
ListPlot[tt, PlotRange -> {0, 5}, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```



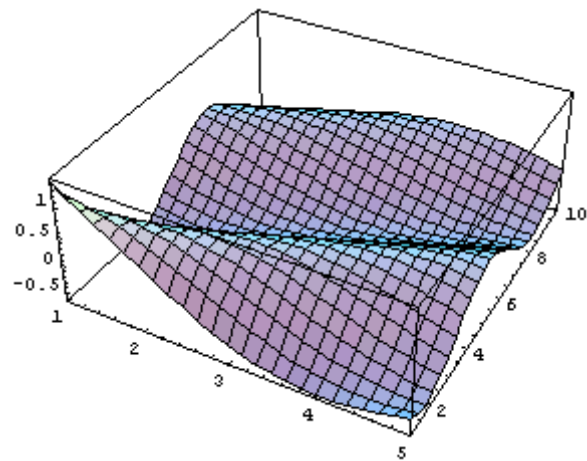
- Graphics -

```
ListPlot[tt, PlotRange -> {0, 5}, PlotJoined -> True]
```

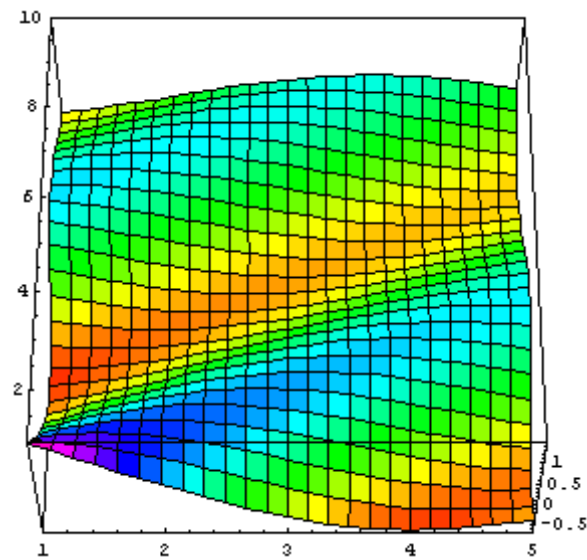


- Graphics -

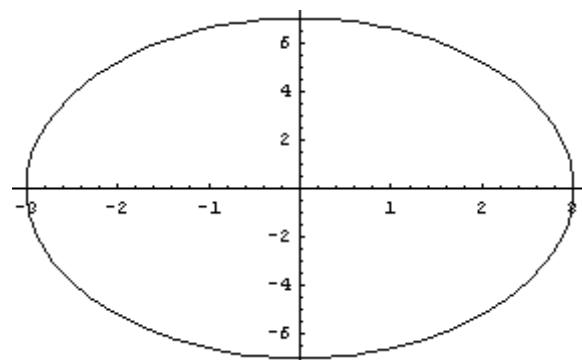
```
Plot3D[ Cos[x - y] / Log[x + y], {x, 1, 5}, {y, 1, 10}]
```



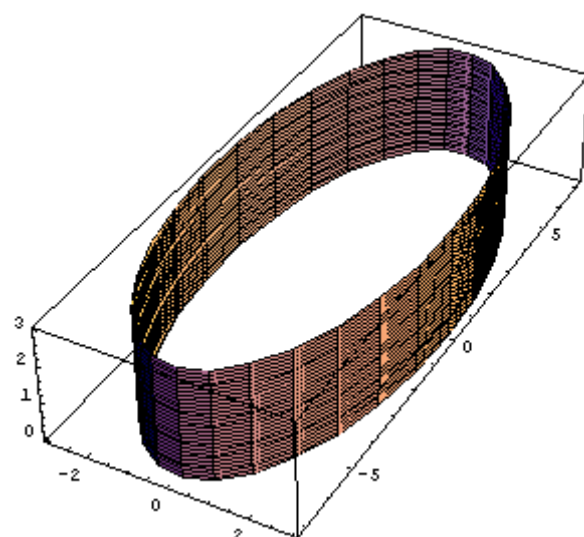
```
- SurfaceGraphics -
Plot3D[ Cos[x - y] / Log[x + y], {x, 1, 5}, {y, 1, 10}, ColorFunction -> Hue, ViewPoint -> {0, -3, 5}]
```



```
- SurfaceGraphics -
(* ellipse *)
ParametricPlot[{3 Cos[φ], 7 Sin[φ]}, {φ, 0, 2 π}]
```



```
(* elliptic cylinder *)
ParametricPlot3D[{3 Cos[φ], 7 Sin[φ], u}, {φ, 0, 2 π}, {u, 0, 3}]
```

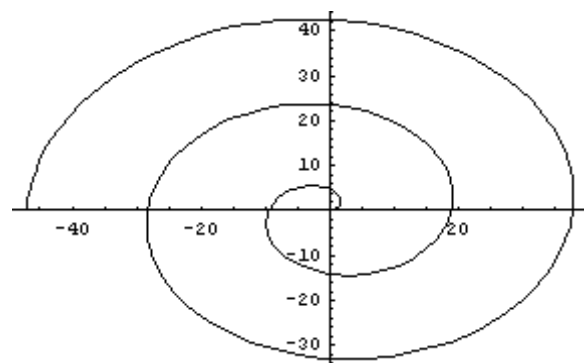


(\* Archimedes' s spiral \*)

a = 3;

ParametricPlot[{a\*fi\*Cos[fi], a\*fi\*Sin[fi]}, {fi, 0, 5\*Pi}]

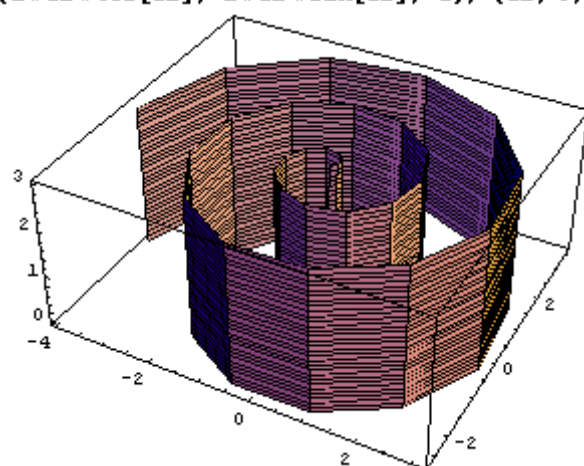
Null



(\* 3 D Archimedes' s spiral \*)

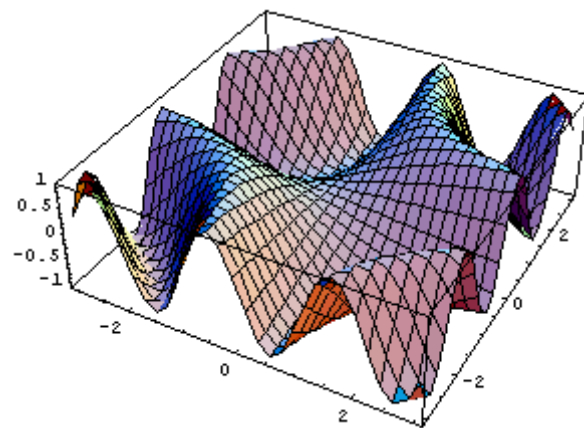
a = 0.25 ;

ParametricPlot3D[{a\*fi\*Cos[fi], a\*fi\*Sin[fi], u}, {fi, 0, 5\*Pi}, {u, 0, 3}]



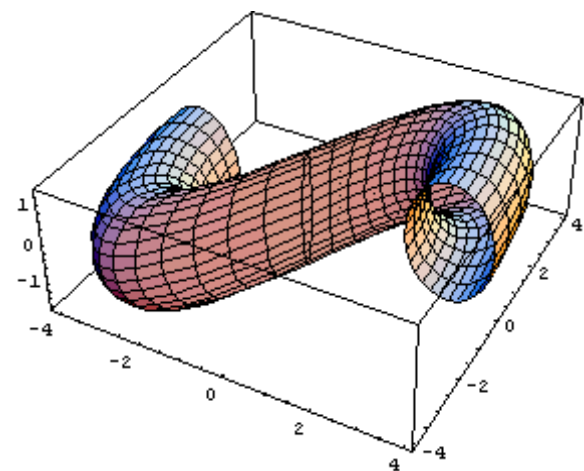
(\* colored serviette \*)

ParametricPlot3D[{t, u, Sin[t\*u]}, {t, -3, 3}, {u, -3, 3}]



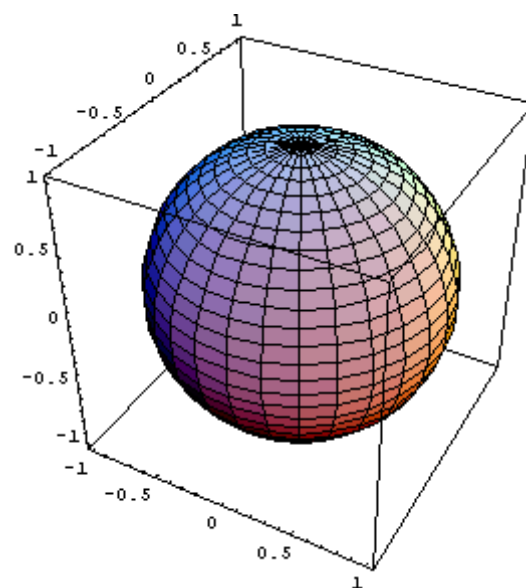
(\* pipe \*)

```
ParametricPlot3D[{Cos[t/2]*(3+Cos[u]), Sin[t]*(3+Cos[u]), 1.5 Sin[u]}, {t, 0, 2 Pi}, {u, 0, 2 Pi}]
```



(\* sphere \*)

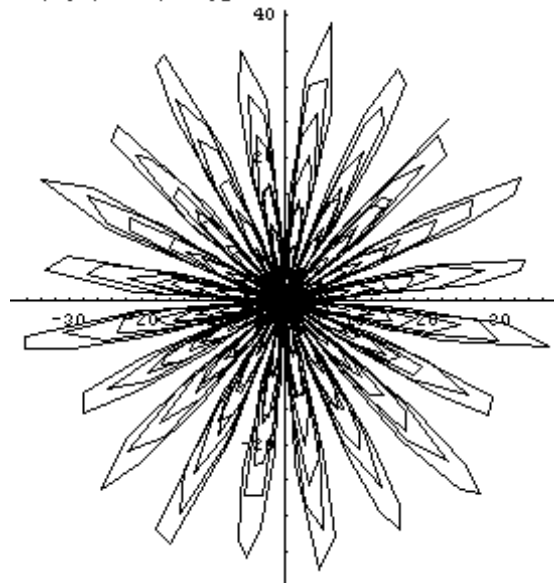
```
ParametricPlot3D[{Cos[t] Cos[u], Sin[t] Cos[u], Sin[u]}, {t, 0, 2 Pi}, {u, -Pi/2, Pi/2}]
```



(\* Loads the standard add-on package Graphics`Graphics` \*)

```
<<Graphics`Graphics`
```

```
(* snowflake *)
PolarPlot[Sin[t * 10] * t, {t, -40, 20}]
```



### 1.13. Algunas primitivas gráficas en 2D

La combinación de gráficas permite obtener una colección de objetos gráficos que llamamos primitivas. Las primitivas más comunes son: el punto, la recta, la elipse, el cubo, etc. Para dibujar las primitivas gráficas usamos la función `Show[Graphics[primitiva]]`.

| <i>Primitiva</i>                                  | <i>Objeto gráfico</i>                                              |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| <code>Point[ {x,y} ]</code>                       | Define el punto del plano de coordenadas {x,y}                     |
| <code>Line [ { {x1,y1},{x2,y2},...} ]</code>      | Define la línea quebrada que se obtiene uniendo los puntos citados |
| <code>Rectangle[{xmin, ymin},{xmax, ymax}]</code> | Define el rectángulo por los vértices opuestos dados               |
| <code>Polygon[ { {x1,y1},{x2,y2},...} ]</code>    | Define un polígono plano de vértices {x1,y1}, {x2,y2}, ...         |
| <code>Circle [ {x,y} , r ]</code>                 | Define el círculo de centro (x,y) y radio r.                       |
| <code>Disk [ {x,y} , r ]</code>                   | Define el disco de centro (a,b) y radio r                          |
| <code>Disk [ {x,y} , {r1,r2} ]</code>             | Define una elipse                                                  |

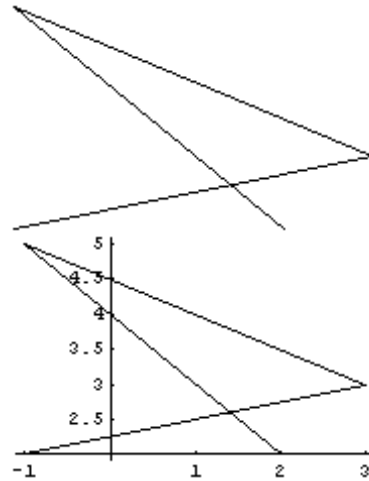
### 1.14. Algunas primitivas gráficas en 3D

Las primitivas más comunes en 3D son: el punto, la línea, el polígono, el cuboide. Para dibujar las primitivas gráficas usamos la función `Show[Graphics[primitiva]]`.

| <i>Primitiva</i>                                             | <i>Objeto gráfico</i>                               |
|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| <code>Point[ {x,y,z} ]</code>                                | Define el punto de coordenadas {x,y,z}              |
| <code>Line [ { {x1,y1,z1},{x2,y2,z2},...} ]</code>           | Define la línea quebrada uniendo los puntos citados |
| <code>Polygon[{ {x1,y1,z1},{x2,y2,z2},...} ]</code>          | Define el polígono de vértices los puntos citados   |
| <code>Cuboid [ {xmin, ymin,zmin}, {xmax, ymax,zmax} ]</code> | Define el paralelepípedo por sus vertices opuestos. |

## 1.15. Ejemplos de primitivas gráficas

```
(* Broken line in the plane defined by the boundary points of its segments*)  
linia1 = Line[ { {-1, 2}, {3, 3}, {-1, 5}, {2, 2} } ];  
g2 = Show[Graphics[linia1]]  
Show[g2, Axes -> True]
```



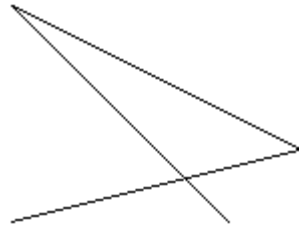
```
(* Rectangle defined by its dots *)  
rec = Graphics[ {Rectangle[{1, -1}, {2, -0.3}]} ];  
g3 = Show[rec, AspectRatio -> 1]
```



```
(* Polygon for n=5 (pentagon) *)  
pet1 = Table[{Sin[2  $\pi$  * n / 5.], Cos[2  $\pi$  * n / 5.]}, {n, 5}];  
d5 = Graphics[Polygon[pet1]];  
Show[d5, AspectRatio -> 1]
```



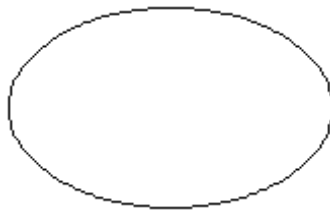
```
(* Displayng the three primitives in the same graphics *)  
Show[g2, rec, d5, AspectRatio -> Automatic]
```



```
(* Polygon for n=11 *)
pet2 = Table[{Sin[2  $\pi$  * n / 11.], Cos[2  $\pi$  * n / 11.]}, {n, 11}];
Show[Graphics[Polygon[pet2]], AspectRatio -> Automatic]
```



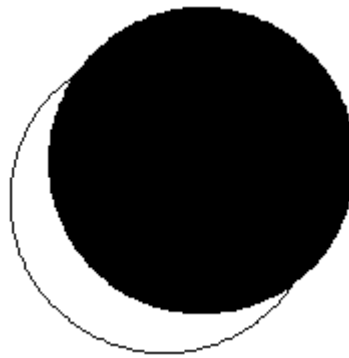
```
(* Circle defined by the center in {1,6} and radius 4 *)
(* The default ratio of y/x in Mathematica is the GoldenRatio = 0.618 *)
s1 = Graphics[Circle[{1, 6}, 4]];
Show[s1]
```



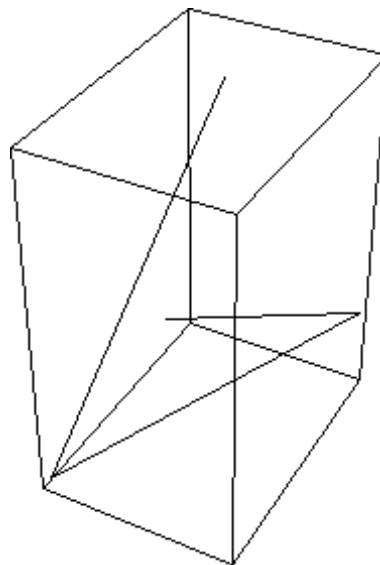
```
(* Disk defined by the co-ordinates of its center and radius *)
s2 = Graphics[Disk[{2, 7}, 4]];
Show[s2]
```



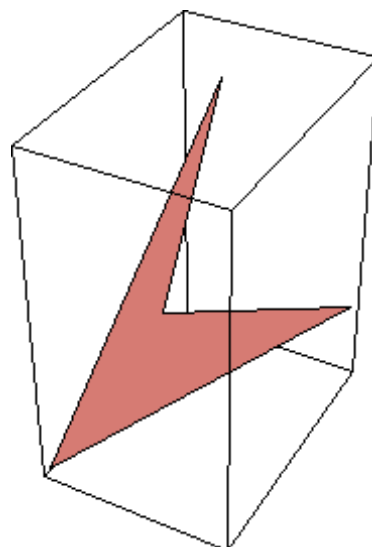
```
(* Combined graphics of the upper circle and the disk at ratio y/x=1 *)
Show[s1, s2, AspectRatio -> 1]
```



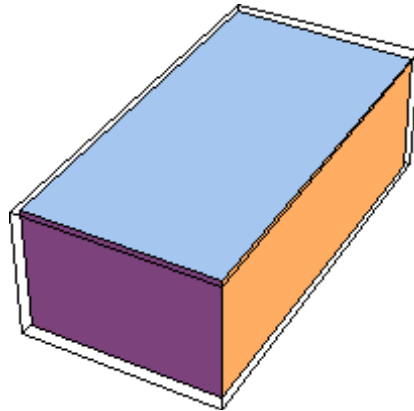
```
(* Broken line in the 3D space defined by its vertices *)
points = { {1, 0, 2}, {5, 7, -1}, {-2, -3, -4}, {1, 4, 9}};
k1 = Line[ points ];
g6 = Show[Graphics3D[ k1]]
```



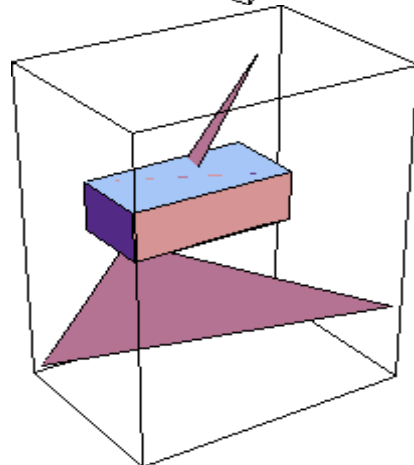
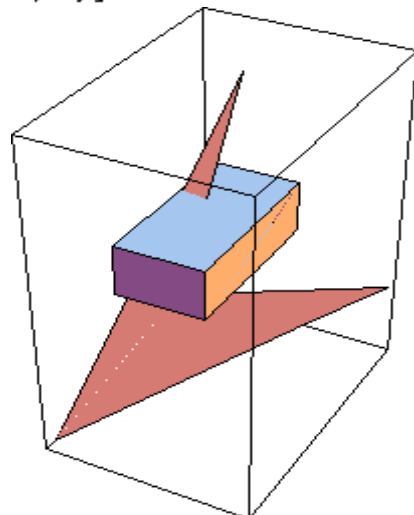
```
(* 3D polygon of the previous example *)
poli = Polygon[ points];
g7 = Show[Graphics3D[poli]]
```



```
(* Graphics of a parallelepiped defined by two opposite vertices *)
cu1 = Cuboid[{0, -2, 3}, {3, 4, 5}]
g8 = Show[Graphics3D[cu1]]
```



```
(* Combined graphics of the polygon and parallelepiped *)
(* The last graphics show the same from a different view point *)
Show[g7, g8]
Show[%, ViewPoint -> {3, -2, 2}]
```



## CAPÍTULO 2: Lecciones prácticas con *Mathematica*

### 2.1. Resolviendo ecuaciones y sistemas de ecuaciones

#### Resolviendo ecuaciones y sistemas de ecuaciones con las funciones de *Mathematica* *Solve*, *Eliminate*, *Reduce*, *FindRoot*

La primera opción a la hora de resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones es usar la función `Solve[ ]`, que siempre trata de resolver exactamente el problema planteado mediante la aplicación de una determinada fórmula. Si esa función no resuelve el problema, entonces trataremos de usar las funciones `NSolve`, `Eliminate`, `Reduce`, `FindRoot`, ...

Ejemplo 1. Resolvemos la ecuación cuadrática y extraemos sus soluciones

```
Solve[x^2 == 4]      (* Notice the use of logical equality == instead of = *)
x1 = x /. %[[1]]
x2 = x /. %[[2]]
```

```
{{x -> -2}, {x -> 2}}
-2
2
```

Verificamos el contenido de las variables `x1`, `x2`:

```
x1
x2
```

```
-2
2
```

Ejemplo 2. Resolvemos la ecuación  $x^6 - 1 = 0$  y almacenamos el resultado en la variable `z`. Luego extraemos algunas raíces de esa lista.

```
z = Solve[x^6 - 1 == 0]
x3 = x /. z[[3]]
x5 = x /. z[[5]]
```

```
{{x -> -1}, {x -> 1}, {x -> -(-1)^(1/3)}, {x -> (-1)^(1/3)}, {x -> -(-1)^(2/3)}, {x -> (-1)^(2/3)}}
-(-1)^(1/3)
-(-1)^(2/3)
```

Calculamos estos valores con 12 dígitos decimales:

```
N[x3,12]
N[x5,12]
```

```
-0.500000000000 - 0.866025403784 i
0.500000000000 - 0.866025403784 i
```

Ejemplo 3. Si tratamos de resolver la ecuación  $x^7 - 5x^3 = \sqrt{x+1}$ , obtenemos solo las reglas correspondientes. Por eso utilizamos la función `NSolve[ ]`. La ecuación posee 2 raíces reales y 6 complejas.

```
r = Solve[x^7 - 5 x^3 == Sqrt[x + 1], x]
r = NSolve[x^7 - 5 x^3 == Sqrt[x + 1], x]
```

```
{{x -> Root[-1 - #1 + 25 #1^6 - 10 #1^10 + #1^14 &, 1]}, {x -> Root[-1 - #1 + 25 #1^6 - 10 #1^10 + #1^14 &, 4]},
 {x -> Root[-1 - #1 + 25 #1^6 - 10 #1^10 + #1^14 &, 5]}, {x -> Root[-1 - #1 + 25 #1^6 - 10 #1^10 + #1^14 &, 6]},
 {x -> Root[-1 - #1 + 25 #1^6 - 10 #1^10 + #1^14 &, 9]}, {x -> Root[-1 - #1 + 25 #1^6 - 10 #1^10 + #1^14 &, 10]},
 {x -> Root[-1 - #1 + 25 #1^6 - 10 #1^10 + #1^14 &, 13]}, {x -> Root[-1 - #1 + 25 #1^6 - 10 #1^10 + #1^14 &, 14]}}
 {{x -> 1.52763}, {x -> -1.49584 + 0.0157155 I}, {x -> -1.49584 - 0.0157155 I}, {x -> -0.0283271 + 1.48305 I},
 {x -> -0.0283271 - 1.48305 I}, {x -> 0.27615 + 0.550671 I}, {x -> 0.27615 - 0.550671 I}, {x -> -0.520013}}
```

Ejemplo 4. Intentamos resolver exactamente dos ecuaciones trigonométricas y vemos que eso no es siempre posible

```
Solve[Cos[x]==a,x]
Solve[Cos[x]==2x,x]
```

**Solve::ifun** : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use `Reduce` for complete solution information. [More...](#)

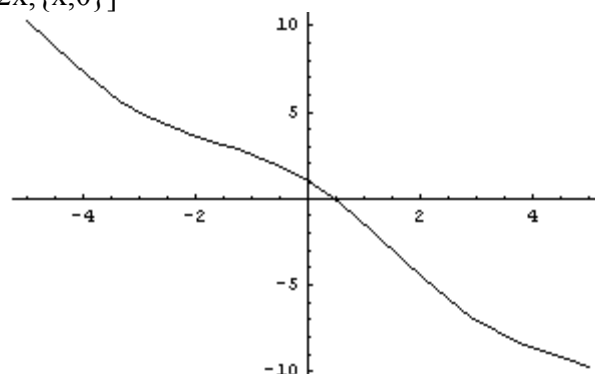
```
{{x -> -ArcCos[a]}, {x -> ArcCos[a]}}
```

**Solve::tdep** : The equations appear to involve the variables to be solved for in an essentially non-algebraic way. [More...](#)

```
Solve[Cos[x]== 2 x, x]
```

Ejemplo 5. Para resolver la segunda ecuación del ejemplo anterior, dibujamos la gráfica de la función para localizar la raíz y luego resolvemos el problema mediante el método de Newton aplicando la función `FindRoot[ ]`. El punto inicial puede ser  $x=0$ .

```
Plot[Cos[x]-2x,{x,-5,5}]
FindRoot[Cos[x]==2x,{x,0}]
```



•Graphics•

{x→0.450184}

Ejemplo 6. Resolvemos ahora un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y extremos las primeras soluciones en las variables a, b :

$$f = 3x + y - 5$$

$$g = -x + 2y + 1$$

**Solve[{f==0,g==0},{x,y}]** (\*In the first curly brackets we indicate the list of equations \*)

(\* and in the second curly brackets the list of unknowns x,y \*)

N[%]

a= x/. %[[1]]

b= y/. %%[[1]]

$$-5 + 3x + y$$

$$1 - x + 2y$$

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{11}{7}, y \rightarrow \frac{2}{7} \right\} \right\}$$

$$\{(x \rightarrow 1.57143, y \rightarrow 0.285714)\}$$

$$1.57143$$

$$0.285714$$

Example 7. Verificamos que la solución es correcta:

a

b

f /. {x->a,y->b}

g /. {x->a,y->b}

$$1.57143$$

$$0.285714$$

$$0.$$

$$0.$$

Ejemplo 8. Resolvemos el sistema paramétrico:

**Solve[{c\*x + y==0, 3x + (1+c)y == 1}, {x,y}]**

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{1}{-3+c+c^2}, y \rightarrow \frac{c}{-3+c+c^2} \right\} \right\}$$

Ejemplo 9. Resolvemos un sistema de dos ecuaciones. En ocasiones la salida es muy larga y puede ser poco manejable. Se puede ocultar/mostrar la solución haciendo un doble click en el corchete del final de la celda.

$$p = x^2 + 2y == 3; \quad q = 3x + y^2 == 1;$$

**Solve[{p,q},{x,y}]**

Los valores numéricos de las raíces son:

```
% // N
{{x -> 1.70919 - 1.29482 i, y -> 0.877608 + 2.21309 i},
 {x -> 1.70919 + 1.29482 i, y -> 0.877608 - 2.21309 i}, {x -> -3.0634, y -> -3.19221}, {x -> -0.354983, y -> 1.43699}}
```

Ejemplo 10. Resolveremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x,y, Por conveniencia almacenamos las ecuaciones en dos variables auxiliares ur1 y ur2. Obsérvese que es distinto el signo igual == del signo de asignación =. Intentamos resolver el sistema con la función Solve y obtenemos que las posibles raíces exactas del sistema verifican una serie de reglas que no nos permiten manejar la solución. Tratamos entonces de resolver el sistema numéricamente y almacenamos las terceras soluciones en dos nuevas variables que nos permitiría usarlas si fuera necesario para cálculos posteriores.

```
ur1 = x3 - 2 x y - 1 == 0
ur2 =  $\frac{y^2}{x} + 4 y - x == -1$ 
Solve[{ur1, ur2}, {x, y}] (* Mathematica gives us the rules it is applied for *)
N[%] (*This is better to obtain the approximate numerical solutions*)
x3 = x /. %[[3]]
y3 = y /. %[[3]]
```

```
-1 + x3 - 2 x y == 0
-x + 4 y +  $\frac{y^2}{x} == -1$ 
```

```
{y → 0, x → 1}, {y → 1/2 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 1]
  (-8 + 3 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 1] - 4 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 1]^2 +
    8 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 1]^3 + Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 1]^4),
  x → Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 1]}, {y → 1/2 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 2]
  (-8 + 3 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 2] - 4 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 2]^2 +
    8 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 2]^3 + Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 2]^4),
  x → Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 2]}, {y → 1/2 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 3]
  (-8 + 3 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 3] - 4 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 3]^2 +
    8 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 3]^3 + Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 3]^4),
  x → Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 3]}, {y → 1/2 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 4]
  (-8 + 3 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 4] - 4 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 4]^2 +
    8 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 4]^3 + Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 4]^4),
  x → Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 4]}, {y → 1/2 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 5]
  (-8 + 3 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 5] - 4 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 5]^2 +
    8 Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 5]^3 + Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 5]^4),
  x → Root[-1 - #1 + 7 #1^2 + 5 #1^3 + 9 #1^4 + #1^5 &, 5]}]}
```

```
{{y → 0., x → 1.}, {y → 36.2737, x → -8.51057}, {y → 1.58238, x → -0.327031}, {y → -1.29146, x → 0.367882},
  {y → -0.282294 - 0.23497 ĩ, x → -0.265139 - 0.952031 ĩ}, {y → -0.282294 + 0.23497 ĩ, x → -0.265139 + 0.952031 ĩ}}
```

```
-0.327031
1.58238
```

Ejemplo 11. Si las ecuaciones son muy complejas, se puede intentar una simplificación eliminando algunas incógnitas en algunas ecuaciones. Eso es lo que hacemos ahora.

```
opr1=Eliminate[{ur1,ur2},x]
opr2=Eliminate[{ur1,ur2},y]
```

$$10y + 43y^2 + 74y^3 - 12y^4 - 36y^5 + y^6 == 0$$

$$-8x^2 + 2x^3 - 4x^4 + 8x^5 + x^6 == -1$$

Ejemplo 12. Resolvemos ahora las ecuaciones obtenidas antes..

```
rey=N[Solve[opr1,y]]
rex=N[Solve[opr2,x]]
```

```
{{y → 0.}, {y → -1.29146}, {y → 1.58238}, {y → 36.2737}, {y → -0.282294 - 0.23497 ĩ}, {y → -0.282294 + 0.23497 ĩ}}
```

```
{{x → 1.}, {x → -8.51057}, {x → -0.327031}, {x → 0.367882}, {x → -0.265139 - 0.952031 ĩ}, {x → -0.265139 + 0.952031 ĩ}}
```

```
x2=x/.rex[[2]]
```

```
ur11=ur1 /. x->x2
N[Solve[ur11,y ]]
```

```
-8.51057
-617.419+17.0211 y ==0
{{y -> 36.2737}}
```

Ejemplo 13. *Mathematica* resuelve ahora un sistema homogéneo. Obsérvese que se obtiene la solución exacta del sistema planteado.

```
Clear[x, y, z]
Solve[{x^2 + 2 y - 3 z == 0, x - z - y == 0, -x + 6 y + 4 z == 0}, {x, y, z}]
```

```
{{y -> -63/4, z -> 105/4, x -> 21/2}, {y -> 0, z -> 0, x -> 0}}
```

Ejemplo 14. Todas las posibilidades presentes pueden ser examinadas con la función *Reduce*. En la presentación del resultado aparecen las funciones lógicas habituales. Utilizamos esta función para examinar la solución de la ecuación de 2º grado:

```
Reduce[a x^2 + b x + c == 0, x]
```

```
x == (-b - Sqrt[b^2 - 4 a c]) / (2 a) && a != 0 || x == (-b + Sqrt[b^2 - 4 a c]) / (2 a) && a != 0 || a == 0 && b == 0 && c == 0 || a == 0 && x == -c/b && b != 0
```

Si se dan valores a los parámetros, la solución es la esperada:

```
a = 5
Reduce[a x^2 + b x + c == 0, x]
b = 6
Reduce[a x^2 + b x + c == 0, x]
c = -3
Reduce[a x^2 + b x + c == 0, x]
N[%]
```

```
5
x == 1/5 (-3 - 2 Sqrt[6]) || x == 1/5 (-3 + 2 Sqrt[6])
6
x == 1/5 (-3 - 2 Sqrt[6]) || x == 1/5 (-3 + 2 Sqrt[6])
-3
x == 1/5 (-3 - 2 Sqrt[6]) || x == 1/5 (-3 + 2 Sqrt[6])
x == -1.5798 || x == 0.379796
```

Ejemplo 15. Se presenta ahora la solución del ejemplo 10 con la función *Reduce*. Puesto que el resultado es una larga y complicada expresión lógica, evitamos mostrarla escribiendo un ; al final del operador. Luego calculamos los valores numéricos obtenidos.

```
Reduce[{ur1, ur2}, {x, y}];
N[%]
```

```
x == 1. && y == 0. || x == -8.51057 && y == 36.2737 || x == -0.327031 && y == 1.58238 || x == 0.367882 && y == -1.29146 ||
x == -0.265139 - 0.952031 i && y == -0.282294 - 0.23497 i || x == -0.265139 + 0.952031 i && y == -0.282294 + 0.23497 i
```

Ejemplo 16. Calculamos ahora las soluciones a partir del método numérico de Newton que se obtiene mediante la función FindRoot.

```
FindRoot[{ur1, ur2}, {x, -1}, {y, -1}]
FindRoot[{ur1, ur2}, {x, -0.1 + i}, {y, i}]
```

```
{x -> 1., y -> 1.88287 x 10^-19}
```

```
{x -> -0.265139 + 0.952031 i, y -> -0.282294 + 0.23497 i}
```

Ejemplo 18. Expresando uno de los valores en función del otro.

```
f1=Reduce[ur1,y]
f2=Reduce[ur2,y]
```

```
x != 0 && y ==  $\frac{-1 + x^3}{2x}$ 
```

```
x != 0 && (y == -2x - sqrt(-x + 5x^2) || y == -2x + sqrt(-x + 5x^2))
```

## 2.2. Cálculo: derivadas, integrales y límites

Ejemplo 1. Obtenemos la primera y tercera derivadas de un polinomio.

```
f=x^5-2x^3-1
```

```
D[f,x]
```

```
D[f,{x,3}]
```

```
-1 - 2 x^3 + x^5
```

```
-6 x^2 + 5 x^4
```

```
-12 + 60 x^2
```

Los mismos comandos pueden escribirse con ayuda de las paletas de símbolos matemáticos.

```
f = x^5 - 2 x^3 - 1
```

```
f'
```

```
f1 = D_x f
```

```
f3 = D_{x,x,x} f
```

```
-1 - 2 x^3 + x^5
```

```
(-1 - 2 x^3 + x^5)'
```

```
-6 x^2 + 5 x^4
```

$$-12 + 60 x^2$$

También podemos definir la función mediante esta opción:

$$h[x_] := x^5 - 2 x^3 - 1$$

$$\partial_x h[x]$$

$$h[1]$$

$$-6 x^2 + 5 x^4$$

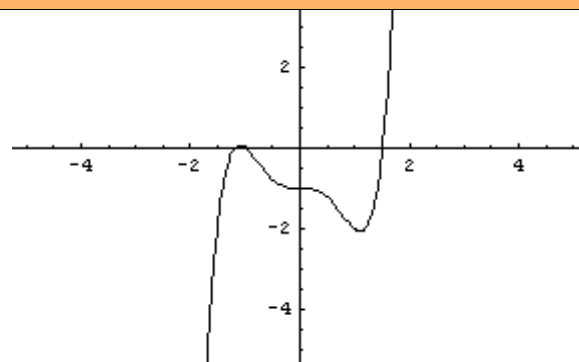
$$-2$$

Ejemplo 2. Veamos las gráficas de las funciones derivadas del ejemplo 1. Es interesante su comportamiento en el intervalo  $[-2,2]$  y por eso solo las representamos en dicho intervalo.

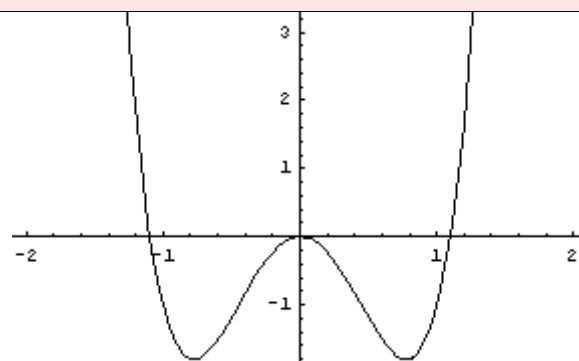
```
g1 = Plot[f, {x, -5, 5}]
```

```
g2 = Plot[f1, {x, -2, 2}]
```

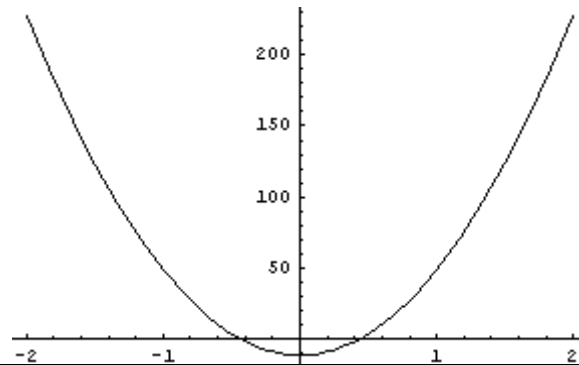
```
g3 = Plot[f3, {x, -2, 2}]
```



- Graphics -



- Graphics -



- Graphics -

Ejemplo 3. Calculamos algunas derivadas parciales de una función de dos variables.

```
g[x_, y_] := 7 x^2 - y^3 - Log[x]
```

```
∂x g[x, y]
```

```
∂y g[x, y]
```

```
∂x,y g[x, y]
```

```
1  
- + 14 x  
x
```

```
-3 y^2
```

```
0
```

Ejemplo 4. Limpiamos la variable f. Calculamos después algunas derivadas simbólicas con f.

```
f = .
```

```
D[f[x], x]
```

```
D[5 * x * f[x], x]
```

```
f'[x]
```

```
5 f[x] + 5 x f'[x]
```

Ejemplo 5. Si le asignamos algún valor de f, el posible antiguo valor es anulado automáticamente. Calculamos algunas integrales para el nuevo valor de la variable f.

```
f = (1 - 2 x^3) / (2 + 3 x)
```

```
∫ f dx
```

```
Integrate[f, x] (* The same as in the previous operator *)
```

```
∫01 f dx
```

```
% // N (* Here the symbol % takes the preceding result *)
```

```
(1 - 2 x^3) / (2 + 3 x)
```

```
1  
(-6 x (4 - 3 x + 3 x^2) + 43 Log[2 + 3 x])  
81
```

```
1  
(-6 x (4 - 3 x + 3 x^2) + 43 Log[2 + 3 x])  
81
```

$$\frac{1}{81} \left( -24 + 43 \operatorname{Log} \left[ \frac{5}{2} \right] \right)$$

0.19013

Ejemplo 6. Calculamos derivadas e integrales de una función de dos variables.

```
newf[x_, y_] := x^4 + 3 y
d = D[newf[x, y], x]
Integrate[newf[x, y], {y, 1, 2}]
% // N
4 x^3
47
10
4.7
```

Ejemplo 7. Queremos calcular la integral doble de una función trigonométrica. El sistema tiene dificultades en el cálculo porque la función integrando tiene singularidades. A pesar de que el cálculo es muy lento, obtenemos la solución. Si el cálculo es muy lento, siempre se puede interrumpir la evaluación acudiendo al menú Kernel/Abort Evaluation.

```
f =.
f[x_, y_] := Cos[x/y]
Integrate[f[x, y], {x, 0, Pi}, {y, 0, Pi}] (* Exact value by formulae *)
% // N (* Its numerical value *)
N[Integrate[f[x, y], {x, 0, Pi}, {y, 0, Pi}]] (* The equivalent of the two previous lines *)
NIntegrate[f[x, y], {x, 0, Pi}, {y, 0, Pi}] (* Approximate integration by numerical method *)

-1/4 Pi^2 (Pi - 2 (Cos[1] + Sin[1] + SinIntegral[1]))
3.73594
3.73594
```

```
NIntegrate::slwcon :
Numerical integration converging too slowly; suspect one of the following: singularity, value
of the integration being 0, oscillatory integrand, or insufficient WorkingPrecision. If
your integrand is oscillatory try using the option Method->Oscillatory in NIntegrate. More...
NIntegrate::ncvb : NIntegrate failed to converge to prescribed
accuracy after 13 recursive bisections in y near {x, y} = {3.0009, 0.00198991}. More...
```

3.73532

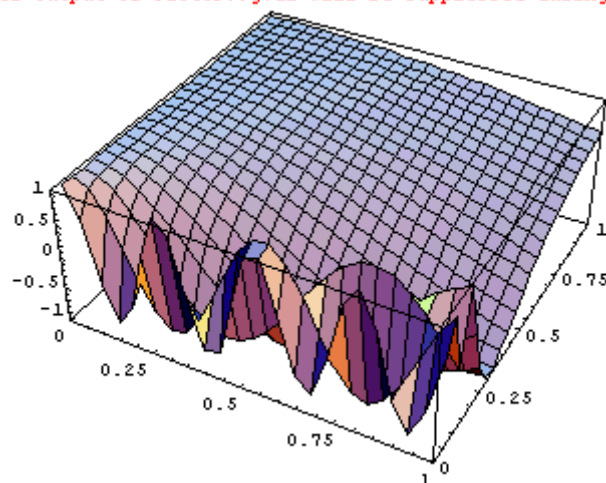
Ejemplo 8. Se representa ahora la función del ejemplo anterior para mostrar las singularidades.

```
Plot3D[f[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]
```

```

Power::infy : Infinite expression  $\frac{1}{0.}$  encountered. More...
∞::indet : Indeterminate expression 0. ComplexInfinity encountered. More...
Power::infy : Infinite expression  $\frac{1}{0.}$  encountered. More...
∞::indet : Indeterminate expression 0. ComplexInfinity encountered. More...
Power::infy : Infinite expression  $\frac{1}{0.}$  encountered. More...
General::stop : Further output of Power::infy will be suppressed during this calculation. More...
∞::indet : Indeterminate expression 0. ComplexInfinity encountered. More...
General::stop : Further output of ∞::indet will be suppressed during this calculation. More...
Plot3D::plnc : f[x, y] is neither a machine-size real number at
  {x, y}={0., 0.} nor a list of a real number and a valid color directive. More...
Plot3D::plnc : f[x, y] is neither a machine-size real number at {x, y}=
  {0.0416667, 0.} nor a list of a real number and a valid color directive. More...
Plot3D::plnc : f[x, y] is neither a machine-size real number at {x, y}=
  {0.0833333, 0.} nor a list of a real number and a valid color directive. More...
General::stop : Further output of Plot3D::plnc will be suppressed during this calculation. More...
Plot3D::gval : Function value Indeterminate at grid point xi = 1, yi = 1 is not a real number. More...
Plot3D::gval : Function value Indeterminate at grid point xi = 2, yi = 1 is not a real number. More...
Plot3D::gval : Function value Indeterminate at grid point xi = 3, yi = 1 is not a real number. More...
General::stop : Further output of Plot3D::gval will be suppressed during this calculation. More...

```



- SurfaceGraphics -

Ejemplo 9. Nuevo ejemplo de cálculo de integrales.

$$f = .; \quad f = x^2 + \frac{1}{1+y^2}$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f \, dy \, dx$$

N[%]

$$x^2 + \frac{1}{1+y^2}$$

$$-\frac{5}{7} + \frac{\pi}{2}$$

$$0.856511$$

Ejemplo 10. Esta vez trabajamos con una integral triple.

$$\int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^x \int_{\frac{x+y}{2}}^{x+y} \frac{1}{1+x+y+z} dz dy dx$$

% // N

$$\frac{1}{432} (-1408 \text{Log}[4] + 675 \text{Log}[5] - 216 \text{Log}[8] + 676 \text{Log}[13] - 72 \text{Log}[256])$$

0.0462077

**0.046207747858420245`**

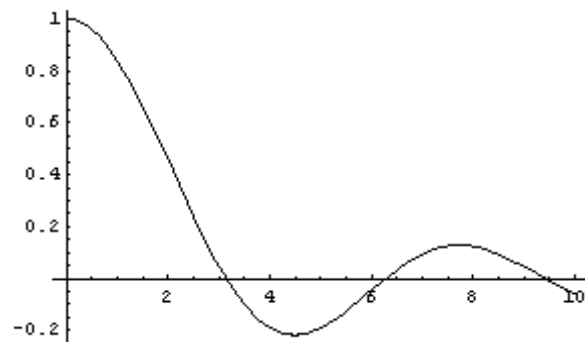
Ejemplo 11. Vamos a examinar otra función con singularidades. El sistema realiza la gráfica sin problemas, a pesar de que no está definida para  $x=0$ .

$$f = \frac{\text{Sin}[x]}{x}$$

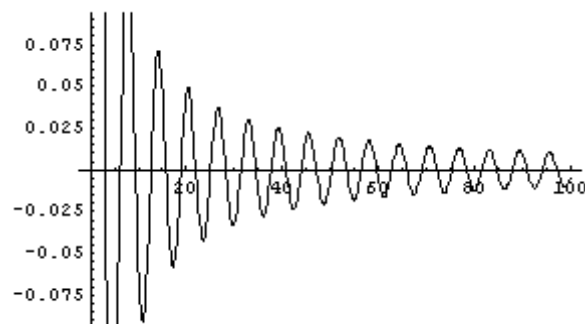
**Plot[f, {x, 0, 10}]**

**Plot[f, {x, 0, 100}]**

$$\frac{\text{Sin}[x]}{x}$$



- Graphics -



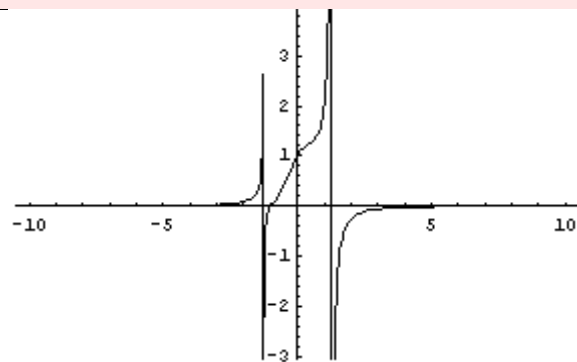
- Graphics -

Ejemplo 12. Calculamos los límites adecuados para esa función y hacemos una integral impropia.

```
Limit[f, x → 0]
Limit[f, x → Infinity]
 $\int_0^{\infty} f \, dx$ 
1
0
 $\frac{\pi}{2}$ 
```

Ejemplo13. Otra función con singularidades.

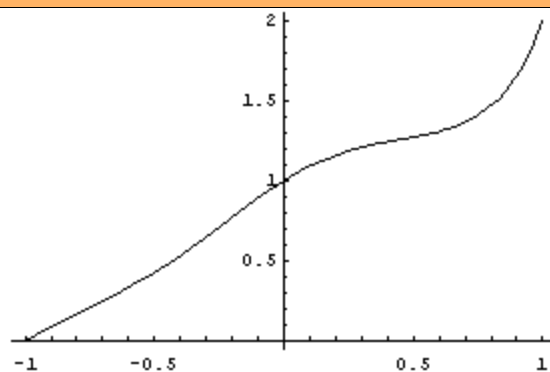
```
h =  $\frac{x + 1}{1 + x^2 - x^4}$ 
Plot[h, {x, -10, 10}]
```

$$\frac{1 + x}{1 + x^2 - x^4}$$


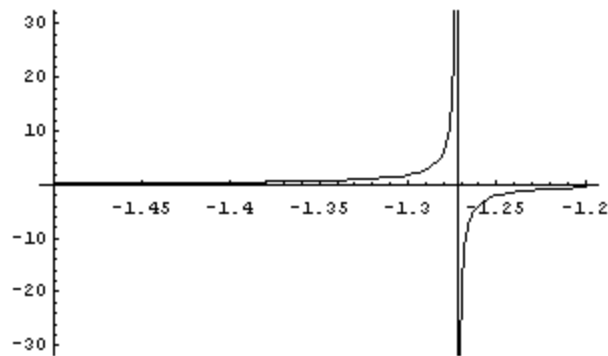
- Graphics -

Ahora las gráficas en intervalos seleccionados.

```
Plot[h, {x, -1, 1}]
Plot[h, {x, -1.5, -1.2}]
```



-Graphics-



-Graphics-

### 2.3. Series numéricas y desarrollos en serie.

**Series numéricas y desarrollos en serie: Series, Normal, Simplify y otras funciones.**

Ejemplo 1. El desarrollo en serie de potencias de una función se genera con la función Series[ ]. Si la función es de una variable (como en este caso) lo que se obtiene es la serie de Taylor de la función.

**Series[(1+x)<sup>n</sup>, {x, 0, 5}]**

$$1 + nx + \frac{1}{2}(-1+n)nx^2 + \frac{1}{6}(-2+n)(-1+n)nx^3 + \frac{1}{24}(-3+n)(-2+n)(-1+n)nx^4 + \frac{1}{120}(-4+n)(-3+n)(-2+n)(-1+n)nx^5 + O[x]^6$$

Ahora obtenemos el desarrollo en serie en un entorno del punto 1. Con la función Normal[ ] se obtiene el polinomio de Taylor.

**Series[(1+x)<sup>n</sup>, {x, 1, 5}]**

**red1 = Normal[%]**

$$2^n + 2^{-1+n}n(x-1) + 2^{-2+n}(-1+n)n(x-1)^2 + \frac{1}{3}2^{-3+n}(-2+n)(-1+n)n(x-1)^3 + \frac{1}{3}2^{-7+n}(-3+n)(-2+n)(-1+n)n(x-1)^4 + \frac{1}{15}2^{-8+n}(-4+n)(-3+n)(-2+n)(-1+n)n(x-1)^5 + O[x-1]^6$$

$$2^n + 2^{-1+n}n(-1+x) + 2^{-2+n}(-1+n)n(-1+x)^2 + \frac{1}{3}2^{-4+n}(-2+n)(-1+n)n(-1+x)^3 + \frac{1}{3}2^{-7+n}(-3+n)(-2+n)(-1+n)n(-1+x)^4 + \frac{1}{15}2^{-8+n}(-4+n)(-3+n)(-2+n)(-1+n)n(-1+x)^5$$

Ejemplo 2. La serie de Taylor de la función exponencial en el origen.

**Series[e<sup>x</sup>, {x, 0, 7}]**

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + O[x]^8$$

También puede calcularse el polinomio de Taylor como en el caso anterior.

```
Series[Exp[x],{x,0,7}]
```

```
Normal[%]
```

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + O[x]^8$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040}$$

Ejemplo 3. La serie de potencias de una function trigonométrica. Viendo el resultado con los coeficientes decimales se ve lo rápido que los coeficientes tienden a 0.

```
Series[Sin[2t],{t,0,20}]
```

```
N[Normal[%]]
```

$$2t - \frac{4t^3}{3} + \frac{4t^5}{15} - \frac{8t^7}{315} + \frac{4t^9}{2835} - \frac{8t^{11}}{155925} + \frac{8t^{13}}{6081075} - \frac{16t^{15}}{638512875} + \frac{4t^{17}}{10854718875} - \frac{8t^{19}}{1856156927625} + O[t]^{21}$$

$$2. t - 1.33333 t^3 + 0.266667 t^5 - 0.0253968 t^7 + 0.00141093 t^9 - 0.0000513067 t^{11} + 1.31556 \times 10^{-6} t^{13} - 2.50582 \times 10^{-8} t^{15} + 3.68503 \times 10^{-10} t^{17} - 4.30998 \times 10^{-12} t^{19}$$

Ejemplo 4. Aquí obtenemos el desarrollo en serie de potencias de un producto de funciones, multiplicando los desarrollos en serie individuales. Utilizamos la función Simplify para obtener alguna simplificación.

```
Series[e^{t+1} Sin[2 t], {t, 0, 7}]
```

```
Normal[%]
```

```
Simplify[%]
```

```
% // N
```

```
Simplify[%]
```

$$2e^t + 2e^t t^2 - \frac{e^t t^3}{3} - e^t t^4 - \frac{19e^t t^5}{60} + \frac{11e^t t^6}{180} + \frac{139e^t t^7}{2520} + O[t]^8$$

$$2e^t + 2e^t t^2 - \frac{e^t t^3}{3} - e^t t^4 - \frac{19e^t t^5}{60} + \frac{11e^t t^6}{180} + \frac{139e^t t^7}{2520}$$

$$\frac{e^t (5040 + 5040 t - 840 t^2 - 2520 t^3 - 798 t^4 + 154 t^5 + 139 t^6)}{2520}$$

$$0.00107868 t (5040. + 5040. t - 840. t^2 - 2520. t^3 - 798. t^4 + 154. t^5 + 139. t^6)$$

$$0.149937 (-2.77144 + t) (-1.55945 + t) t (4.01908 + 2.62081 t + t^2) (2.08743 + 2.818 t + t^2)$$

Ejemplo 5. Podemos obtener desarrollos en serie formales.

```
Clear[a,f]
```

```
Series[f[t],{t,0,5}]
```

```
Series[f[t],{t,a,5}]
```

$$f[0] + f'[0] t + \frac{1}{2} f''[0] t^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}[0] t^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}[0] t^4 + \frac{1}{120} f^{(5)}[0] t^5 + O[t]^6$$

$$f[a] + f'[a] (t-a) + \frac{1}{2} f''[a] (t-a)^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}[a] (t-a)^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}[a] (t-a)^4 + \frac{1}{120} f^{(5)}[a] (t-a)^5 + O[t-a]^6$$

Ejemplo 6. Podemos hacer transformaciones con las series.

```
red2=Normal[Series[Tan[-a*x]*(1+Cos[2x]),{x,0,4}]]
```

```
red3=red2 *2 *(1-red2)
```

**Simplify[%]**

$$-2ax + \left(2a - \frac{2a^3}{3}\right)x^3$$

$$2 \left(1 + 2ax - \left(2a - \frac{2a^3}{3}\right)x^3\right) \left(-2ax + \left(2a - \frac{2a^3}{3}\right)x^3\right)$$

$$-\frac{4}{9}ax(3 + (-3 + a^2)x^2)(3 + 2a^3x^3 - 6ax(-1 + x^2))$$

Ejemplo 7. Más operaciones posibles con las series.

**red4 = Collect[red3, x]**

**Collect[red3, a]**

**% /. a -> 1 // N**

**red4 /. {a -> 1., x -> 2.} // N**

$$-4ax - 8a^2x^2 + 2 \left(2a - \frac{2a^3}{3}\right)x^3 + 8a \left(2a - \frac{2a^3}{3}\right)x^4 - 2 \left(2a - \frac{2a^3}{3}\right)^2x^6$$

$$-\frac{4}{3}a^3x^3 - \frac{8a^6x^6}{9} + 2a(-2x + 2x^3) + 2a^2(-4x^2 + 8x^4 - 4x^6) + 2a^4 \left(-\frac{8x^4}{3} + \frac{8x^6}{3}\right)$$

$$-1.33333x^3 - 0.888889x^6 + 2.(-2.x + 2.x^3) + 2.(-4.x^2 + 8.x^4 - 4.x^6) + 2.(-2.66667x^4 + 2.66667x^6)$$

$$-75.5556$$

Ejemplo 8. Las series de funciones de dos variables.

**Series[Sin[x + y^2], {x, 0, 7}, {y, 0, 7}]**

**Normal[%]**

**Series[Sin[e^x], {x, 0, 7}, {y, 0, 5}]**

**Simplify[%]**

$$\left(y^2 - \frac{y^6}{6} + 0[y]^8\right) + \left(1 - \frac{y^4}{2} + 0[y]^8\right)x + \left(-\frac{y^2}{2} + \frac{y^6}{12} + 0[y]^8\right)x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{y^4}{12} + 0[y]^8\right)x^3 + \left(\frac{y^2}{24} - \frac{y^6}{144} + 0[y]^8\right)x^4 +$$

$$\left(\frac{1}{120} - \frac{y^4}{240} + 0[y]^8\right)x^5 + \left(-\frac{y^2}{720} + \frac{y^6}{4320} + 0[y]^8\right)x^6 + \left(-\frac{1}{5040} + \frac{y^4}{10080} + 0[y]^8\right)x^7 + 0[x]^8$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)y^2 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^5}{240} + \frac{x^7}{10080}\right)y^4 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{144} + \frac{x^6}{4320}\right)y^6$$

$$\sin[1] + \cos[1]x + \left(\frac{\cos[1]}{2} - \frac{\sin[1]}{2}\right)x^2 - \frac{1}{2}\sin[1]x^3 + \left(-\frac{5\cos[1]}{24} - \frac{\sin[1]}{4}\right)x^4 +$$

$$\left(-\frac{23\cos[1]}{120} - \frac{\sin[1]}{24}\right)x^5 + \left(-\frac{37\cos[1]}{360} + \frac{11\sin[1]}{240}\right)x^6 + \left(-\frac{23\cos[1]}{720} + \frac{19\sin[1]}{360}\right)x^7 + 0[x]^8$$

$$\sin[1] + \cos[1]x + \frac{1}{2}(\cos[1] - \sin[1])x^2 - \frac{1}{2}\sin[1]x^3 + \frac{1}{24}(-5\cos[1] - 6\sin[1])x^4 +$$

$$\frac{1}{120}(-23\cos[1] - 5\sin[1])x^5 + \frac{1}{720}(-74\cos[1] + 33\sin[1])x^6 + \frac{1}{720}(-23\cos[1] + 38\sin[1])x^7 + 0[x]^8$$

Ejemplo 9. Las series se pueden manipular como las expresiones:

$$s1 = \left(\text{Series}[\text{Log}[1 + x], \{x, 0, 5\}] + \frac{\text{Series}[\text{Sin}[2x], \{x, 0, 5\}]}{\text{Series}[\text{Cos}[3x], \{x, 0, 5\}]}\right)^3$$

$$s2 = \sqrt{s1}$$

$$s3 = \int_0^{\pi/4} s1 dx$$

$$s4 = \partial_x s1$$

$$\begin{aligned}
& 27x^3 - \frac{27x^4}{2} + \frac{873x^5}{4} - \frac{631x^6}{8} + \frac{13461x^7}{10} + O[x]^8 \\
& 3\sqrt{3}x^{3/2} - \frac{3}{4}\sqrt{3}x^{5/2} + \frac{385}{32}\sqrt{3}x^{7/2} - \frac{1583x^{9/2}}{384\sqrt{3}} + \frac{4636997x^{11/2}}{30720\sqrt{3}} + O[x]^{13/2} \\
& \frac{27}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{27}{10}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 + \frac{291}{8}\left(\frac{\pi}{4}\right)^6 - \frac{631}{56}\left(\frac{\pi}{4}\right)^7 + \frac{13461}{80}\left(\frac{\pi}{4}\right)^8 + O\left[\frac{\pi}{4}\right]^9 \\
& 81x^2 - 54x^3 + \frac{4365x^4}{4} - \frac{1893x^5}{4} + \frac{94227x^6}{10} + O[x]^7
\end{aligned}$$

Ejemplo 10. Las series pueden invertirse con la función `InverseSeries[ ]`

```
s5 = Series[ex, {x, 0, 5}]
```

```
s5i = InverseSeries[s5]
```

```
ss = s5 /. x -> s5i
```

```
Normal[ss]
```

$$\begin{aligned}
& 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + O[x]^6 \\
& 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + O[x]^6 \\
& (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 + O[x-1]^6 \\
& 1 + (x-1) + O[x-1]^6 \\
& x
\end{aligned}$$